2º Μαθημα

8/11/2019

Θεωρία Γραφημάτων

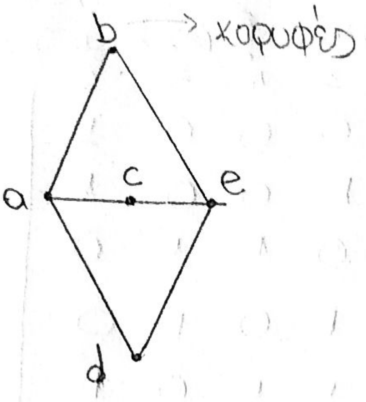
Ισομορφισμοί δυο γραφημάτων G και H

Υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f: V(G) \rightarrow V(H)$

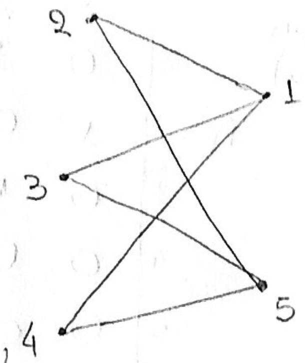
τ.ω. $\{u,v\} \in \underbrace{\mathcal{E}(G)}_{\text{σύνολο ακμών του } G} \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in \mathcal{E}(H)$

Συμβολίζουμε τον ισομορφισμό μεταξύ των G και H ως $G \simeq H$.

πχ.



↳ γράφημα G



↳ γράφημα H

Είναι αυτά τα δυο γραφήματα ισόμορφα?

Απ.: με τον ορισμό

Για να είναι ισομορφισμός πρέπει να $\exists f$:

$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(c) = 3$
$f(d) = 4$
$f(e) = 5$

G   H (οι κορυφές του).

→ Δηλ. το a με το b συνδέεται ⇒ το 1 και το 2 συνδέονται
το a με το e δεν -״- ⇒ το 1 και 5 δεν -״-
(γιατί $\exists$ το c ανάμεσα στο a και το e)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η σχέση $G \simeq H$

- αυτοπαθής $G \simeq G$
- συμμετρική $G \simeq H \Leftrightarrow H \simeq G$
- μεταβατική $G_1 \simeq G_2$, $G_2 \simeq G_3 \rightarrow G_1 \simeq G_3$

Πίνακας Γειτνίασης.

Ένα γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ όπου

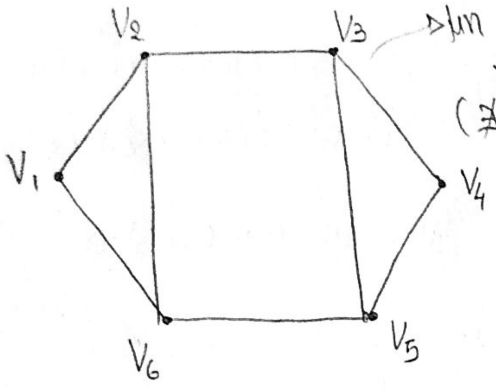
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}(G) \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin \mathcal{E}(G) \end{cases}$$

→ όταν 2 κορυφές ενώνονται με μια ακμή

↳ όταν 2 κορυφές δεν ενώνονται με μια ακμή

//

π.χ. Έστω ένα γράφημα που θέλω να του κάνω πίνακα γειτνίασης.



▷ μη κατευθυνόμενο γράφημα (∄ βελάκια)

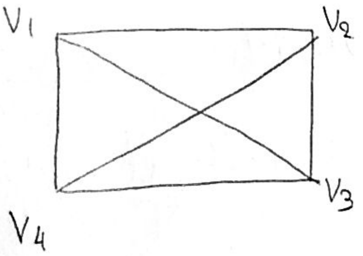
(καμία κορυφή δεν γυρίζει στον εαυτό της)

→ ∄ βελάκι ! ⟺ βάζω 0

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

↳ πίνακας γειτνίασης.

π.χ. Νδο ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος:



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Για να χαλάσω το 0 στην διαγώνιο αρκεί να είχα πισωγύρισμα στην κορυφή (v_1)

/.

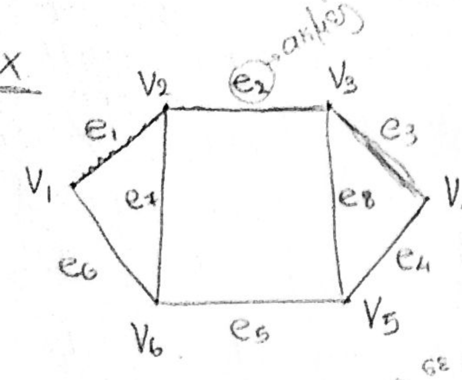
Πίνακας Προσπτώσεων.

Για ένα γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ και $\mathcal{E}(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ ορίζουμε έναν $n \times m$ πίνακα $B = [b_{ij}]$ όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια κορυφή και κάθε στήλη σε μια ακμή.

Τα στοιχεία του πίνακα B ορίζονται ως εξής:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η ακμή } e_j \text{ προσπίπτει στην κορυφή } v_i \\ 0, & \text{αν η ακμή } e_j \text{ \underline{δεν} προσπίπτει στην κορυφή } v_i \end{cases}$$

Π.Χ



Νχ ο πίνακας προσπτώσεων.

$V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}=\{v_1,\dots,v_6\} \to n=6$

$E(G)=\{e_1,\dots,e_n\}=\{e_1,\dots,e_8\} \to m=8$

6x8 πίνακας

όπου $e_1=\{v_1,v_2\}$ (= ακμή)

σε εκείνες τις κορυφές που ακουμπά η ακμή βάζω 1 στον πίνακα και στις άλλες κορυφές βάζω 0

$$B=\begin{array}{c|cccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
\hline
v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

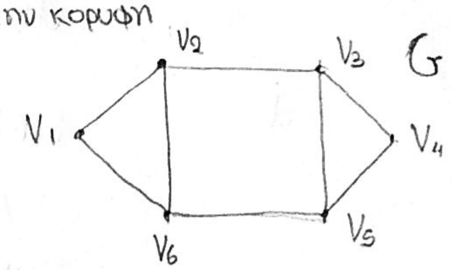
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Πίνακας Γειτνίασης:

- έχει n^2 στοιχεία και είναι συμμετρικός για μη κατευθυνόμενα γραφήματα
- όλες οι διαγώνιες τιμές του είναι μηδενικές. //

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σε κάθε γράφημα αντιστοιχούν $n!$ διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης. //

ΒΑΘΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ.

- Ο βαθμός κορυφής $\deg_G(v)=|N_G(v)|$ → πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή την κορυφή
- Ο ελάχιστος και μέγιστος βαθμός γραφήματος $\delta(G)$, $\Delta(G)$.
- Ο μέσος βαθμός $d(G)=\frac{1}{n}\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$
- Η πυκνότητα $\varepsilon(G)=\frac{m}{n}$ m → πλήθος ακμών, n → πλήθος κορυφών.
- Απομονωμένη κορυφή → έχει βαθμό 0
- Εκκρεμής κορυφή → έχει βαθμό 1
- Καθολική κορυφή → έχει βαθμό $n-1$



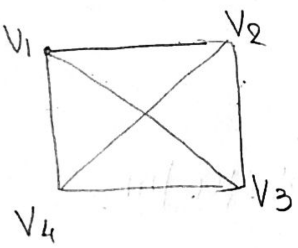
π.χ Για το γράφημα G να βρεθούν:

- $\delta(G) = 2$
- $\Delta(G) = 3$
- $d(G) = \underset{n=6}{\frac{1}{6}} \cdot \sum_{v \in V(G)} (\overset{deg(v_1)}{2} + \overset{deg(v_2)}{3} + 3 + 2 + 3 + 3) = \frac{1}{\cancel{6}_3} \cdot \cancel{16}^{8} = \frac{8}{3}$
- $\varepsilon(G) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ισχύει ότι:

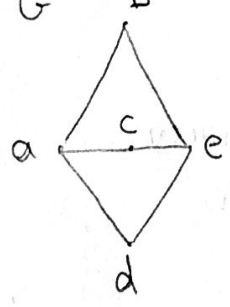
1. $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2m$
2. $\delta(G) \le d(G) \le \Delta(G)$
3. $\varepsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$.

π.χ.



- $\delta(G) = 3$
- $\Delta(G) = 3$
- $d(G) = \frac{1}{4} \cdot \sum (3+3+3+3) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$
- $\varepsilon(G) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

π.χ. "G"



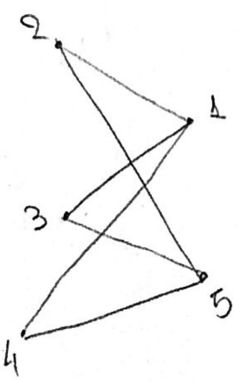
$\delta(G) = 2$

$\Delta(G) = 3$

$d(G) = \frac{1}{5} \cdot \sum (3+2+2+2+3) = \frac{1}{5} \cdot 12 = \frac{12}{5}$.

$\varepsilon(G) = \frac{6}{5}$.

"H"



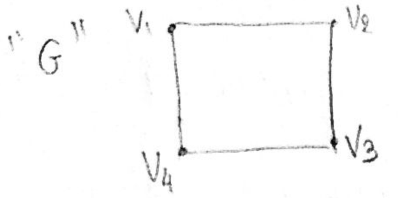
$\delta(H) = 2$

$\Delta(H) = 3$

$d(H) = \frac{1}{5} \cdot \sum (3+2+2+2+3) = \frac{12}{5}$

$\varepsilon(H) = \frac{6}{5}$

πχ Κυκλικό γράφημα:



$\delta(G) = 2$

$\Delta(G) = 2$

$d(G) = \frac{1}{4} \cdot 2(2+2+2+2) = \frac{8}{4} = 2$

$\varepsilon(G) = \frac{4}{4} = 1$